

U. Didáctica 6: Ecuaciones

RECUERDA

- Una **igualdad algebraica** se compone de dos expresiones algebraicas unidas por el signo igual.

Ejemplo: $2x + 3 = 5x - 2$

Una **igualdad** puede ser:

- **Falsa:** $2x + 1 = 2 \cdot (x + 1) \rightarrow 2x + 1 = 2x + 2 \rightarrow 1 \neq 2.$
- **Cierta:** $2x + 2 = 2 \cdot (x + 1) \rightarrow 2x + 2 = 2x + 2 \rightarrow 2 = 2$

- Una **identidad algebraica** es una igualdad que es cierta para cualquier valor de las letras.

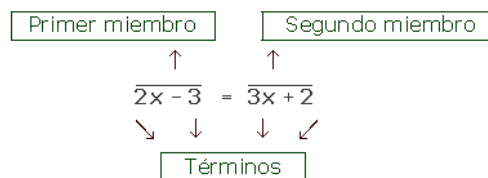
Ejemplo: $2x + 2 = 2 \cdot (x + 1) \rightarrow 2x + 2 = 2x + 2 \rightarrow 2 = 2$

- Una **ecuación** es una igualdad que se cumple para algunos valores de las letras.

Ejemplo: $x + 1 = 2$ es cierta si $x = 1$

- Los **miembros** de una ecuación son cada una de las expresiones que aparecen a ambos lados del signo igual.

- Los **términos** son los sumandos que forman los miembros.



- Las **incógnitas** son las letras que aparecen en la ecuación.
- Las **soluciones** son los **valores** que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.

Ejemplo: en la ecuación $2x - 3 = 3x + 2$ comprobamos que $x = -5$ es solución

$2 \cdot (-5) - 3 = 3 \cdot (-5) + 2 \rightarrow -10 - 3 = -15 + 2 \rightarrow -13 = -13$, cierto, luego es solución.

- Dos **ecuaciones son equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones.
- El **grado** de una ecuación es el **mayor de los grados de los monomios que forman sus miembros**.

Tipos de ecuaciones según su grado.

- Ecuación de primer grado: $5x + 3 = 2x + 1$
- Ecuación de segundo grado: $5x + 3 = 2x^2 + x$

Ejercicios

- Comprueba, en cada caso, que el valor de x propuesto es solución de la ecuación.

a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$, para $x = 1$

b) $2(3x - 5) - 4x = -6$ para $x = 2$

c) $\frac{x-1}{3} - 2x = -7$, para $x = 4$

d) $3x^2 + x - 2 = 0$, para $x = \frac{2}{3}$

2. Escribe una ecuación que se cumpla para $x = 3$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

- Una **ecuación** es de **primer grado** o **lineal** si es equivalente a una ecuación en la que los dos miembros son polinomios de grado 1

Ejemplo: $3x - 5(x+2) = 4x - 1 \rightarrow 3x - 5x - 10 = 4x - 1 \rightarrow -2x - 10 = 4x - 1$.

- Regla de la suma.** Si en una ecuación se suma o se resta el mismo número o la misma expresión algebraica en los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.

Ejemplo: $3x + 6 = x + 16 \Rightarrow 3x + 6 - 6 = x + 16 - 6 \Rightarrow 3x = x + 10 \Rightarrow 3x - x = x + 10 - x \Rightarrow 2x = 10$

- Regla del producto.** Si en una ecuación se multiplican o dividen los dos miembros por un mismo número, distinto de cero, se obtiene una ecuación equivalente.

Ejemplo: $2x = 10 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{10}{2} \Rightarrow x = 5$

Pasos a seguir para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita:

- 1) Se opera para **suprimir los paréntesis**.
- 2) Se opera para **eliminar los denominadores**
- 3) **Se simplifican los términos** que se puedan.
- 4) Se aplican las **reglas de la suma y del producto**

Ejemplos.

❖ Resuelve $3x - 5(x + 2) = 4x - 1$

1. $3x - 5(x + 2) = 4x - 1 \Rightarrow 3x - 5x - 10 = 4x - 1 \Rightarrow -2x - 10 = 4x - 1$
2. $3x - 5x - 10 = 4x - 1 \Rightarrow -2x - 10 = 4x - 1$
3. $-2x - 4x - 10 + 10 = 4x - 4x - 1 + 10 \Rightarrow -6x = 9$
4. $\frac{-6x}{-6} = \frac{9}{-6} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

❖ Resuelve $\frac{2x-5}{3} - \frac{3x-3}{5} = x - 6$

1. $\frac{2x-5}{3} - \frac{3x-3}{5} = x - 6 \Rightarrow \frac{10x-25}{15} - \frac{9x+9}{15} = \frac{15x-90}{15} \Rightarrow 10x - 25 - (9x + 9) = 15x - 90$
2. $10x - 25 - 9x - 9 = 15x - 90 \Rightarrow x - 34 = 15x - 90$
3. $x - 15x - 34 + 34 = 15x - 15x - 90 + 34 \Rightarrow -14x = -56$
4. $\frac{-14x}{-14} = \frac{-56}{-14} \Rightarrow x = 4$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis.

a) $3(x+1)+(3-x)=7-3(1-x)$

b) $2(x+2)-(x+3)=1-3x$

c) $-(3-2x)-(x+1)=-11-3(1-x)$

d) $2x+1=15-2(7-x)$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con denominadores.

a) $\frac{5x}{4}-x=2$

b) $\frac{3x}{2}-\frac{2x}{3}-\frac{5}{3}=0$

$$\text{c) } \frac{3x-1}{4} - \frac{2x}{3} = \frac{1}{12}$$

$$\text{d) } \frac{3-x}{5} + \frac{x}{3} = \frac{4}{5}$$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones con paréntesis y denominadores.

$$\text{a) } \frac{2(x+2)}{3} - \frac{6-x}{4} = \frac{5}{3}$$

$$\text{b) } \frac{3x}{4} - 3\left(x - \frac{2x}{3}\right) = -\frac{5}{4}$$

$$\text{c) } \frac{3x-1}{4} - 3\left(1 - \frac{2x}{3}\right) = \frac{31}{4}$$

$$d) \quad \frac{4(2x-1)}{3} - \frac{x}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{3(2-4x)}{2}$$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Una **ecuación de segundo grado** con una incógnita es aquella que se puede reducir a una ecuación equivalente de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$.

Se define **a** como el *coeficiente principal* y **c** como el **término independiente**

- Si $a \neq 0$, $b \neq 0$, y $c \neq 0$, la ecuación es completa.
Ejemplo: $3x^2 - 11x - 4 = 0$, con $a = 3$, $b = -11$ y $c = -4$
- Si $b = 0$ o $c = 0$ o $b = c = 0$, la ecuación es incompleta.
Ejemplo: $5x^2 + 1 = 0$, con $a = 5$, $b = 0$ y $c = 1$

Una ecuación de segundo grado con una incógnita puede tener dos soluciones, una solución o ninguna solución.

6. Opera y expresa como una ecuación de segundo grado e indica si son completas o incompletas

a) $2x(3x - 5) + 7x(1 - x) = -10$

b) $3x^2 + x(5 - 3x) - 42 = 6(x - 7)$

c) $2x(5x - 1) - 6x^2 + 2(x - 5) = 0$

d) $3x + 5x(x - 1) + 8x - 7 = -8$

Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas

- Las ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$ se resuelven despejando x directamente:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

- Si $-\frac{c}{a}$ es negativo la ecuación no tiene solución
- Si $-\frac{c}{a}$ es positivo, la ecuación tiene dos soluciones opuestas

- Las ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$ se resuelven extrayendo factor común:

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas.

a) $x^2 - 4 = 0$

b) $2x^2 - 8x = 0$

c) $5x^2 + 125 = 0$

d) $5x^2 = 125x$

e) $3x^2 = 27$

f) $x^2 - 4x = 0$

g) $4x^2 = 1$

h) $2x^2 = 4x$

Resolución de ecuaciones de segundo grado completas

- Las soluciones de la ecuación de segundo grado completa $ax^2 + bx + c = 0$ se obtienen mediante la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Rightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

y se tienen dos soluciones: $x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$; $x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$

- El número de soluciones de la ecuación depende del signo del **discriminante** $\Delta = b^2 - 4ac$.
 - Si el discriminante Δ es **menor que cero**, $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones.
 - Si el discriminante Δ es **cero**, $b^2 - 4ac = 0$, hay una solución $x = \frac{-b}{2a}$
 - Si el discriminante Δ es **mayor que cero**, $b^2 - 4ac > 0$, hay dos soluciones.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado completas.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^2 - 6x + 8 = 0$

c) $x^2 + 3x - 4 = 0$

d) $2x^2 + 7x - 15 = 0$

e) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

f) $6x^2 - 14x + 4 = 0$

9. Sin resolver las siguientes ecuaciones, indica el número de soluciones que tiene cada una de ellas.

a) $x^2 - x + 1 = 0$

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

c) $x^2 - 3x - 4 = 0$

d) $x^2 + 7x + 12 = 0$

10. Calcula el valor de k que debe tomar en cada una de las siguientes ecuaciones para que tengan una única solución, y resuélvelas para dicho valor de k .

a) $x^2 + 4x + k = 0$

b) $x^2 - kx + 9 = 0$

c) $kx^2 - 20x + 10 = 0$

11. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 - \frac{x}{2} = \frac{1}{3} - \frac{2x}{3}$

b) $6(x+2)^2 = 13(x+1)(x+2)$

c) $(2x+1)(x+1) = 5(x+1)$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON ECUACIONES

Etapas para resolver un problema con ecuaciones.

- 1) Comprender el problema: identificar los datos e incógnitas, buscar sus relaciones, hacer un dibujo, un esquema, etc.
- 2) Trazar un plan para resolverlo: plantear la ecuación o ecuaciones que permiten resolver el problema
- 3) Poner en práctica el plan: resolver la ecuación o ecuaciones planteadas.
- 4) Comprobar los resultados: comprobar si la solución obtenida tiene sentido en el contexto del problema e interpretar el resultado.

12. Si sumamos 5 unidades al doble de un número, se obtiene el mismo resultado que si le sumamos 7 unidades a ese número. ¿Cuál es dicho número?

13. La suma de tres números impares consecutivos es 177. Halla esos tres números.

14. La diferencia entre la cuarta y la quinta parte de un número es 20. Halla dicho número.

15. Daniela es tres años más joven que su hermana Martina y un año mayor que su hermano Hugo. Entre los tres suman la edad de su madre, Arantxa, que tiene 38 años. ¿Cuál es la edad de cada uno de ellos?

- 16.** En un taller se han contado 42 vehículos en total, sabiendo que hay motos y coches. Y si cuentas sus ruedas hay un total de 108. ¿Cuántas motos y cuántos coches hay en el taller?
- 17.** Lucía ayuda a su padre, que trabaja en una óptica, a limpiar las lentes de los artículos que hay en el escaparate: telescopios, prismáticos y gafas de sol. Cada telescopio tiene 5 lentes, cada prismático tiene 4, y todas las gafas tienen 2. Si hay la mitad de prismáticos que de gafas, y la quinta parte de telescopios que de prismáticos, ¿cuántos artículos hay de cada tipo si Lucía ha limpiado un total de 90 lentes?
- 18.** Si restamos 10 unidades al cuadrado de un número, el resultado coincide con el triple de dicho número. ¿Cuál es el número buscado?
- 19.** El producto de dos números enteros consecutivos es 72. ¿Cuáles son dichos números?

- 20.** El producto de dos números pares positivos consecutivos es igual a 48. ¿Cuáles son dichos números? ¿Existen dos pares consecutivos negativos que satisfagan la condición anterior?
- 21.** El área de una habitación rectangular es 6 m^2 . Calcula las dimensiones de dicha habitación si se sabe que uno de sus lados es 5 metros más largo que el otro. Plantea una ecuación de segundo grado para resolverlo.
- 22.** Calcula cuánto mide la base de un triángulo isósceles de área 20 cm^2 si su altura mide 3 cm más que su base.